Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Präsenzblatt 2 — Musterlösung

Aufgabe 1: Betrachte die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Zeige, dass die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe konvergiert.

Hinweis: Die Monotonie der Wurzel darf verwendet werden.

(b) Zeige, dass das Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst, also

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k,$$

nicht konvergiert.

Lösung.

(a) Wegen der Monotonie der Wurzel ist die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ folgt dann aus dem Leibniz-Kriterium.

(b) Es ist

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt aber

$$n-k+1 < n+1.$$

Wir schließen, dass

$$|s_n| > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1.$$

Demnach kann $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber keine Nullfolge sein und somit kann auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ nicht konvergent sein.

■

Aufgabe 2: Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$a_n := 5^{-n} \quad \text{und} \quad b_n := 13^{-n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Zeige, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergieren und bestimme ihren Wert.

(b) Zeige *nur* über die Formel für das Cauchy-Produkt,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

und unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten Konvergenzkriterien, dass das Cauchy-Produkt der zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Reihen absolut konvergiert.

(c) Berechne nun den Wert dieses Cauchy-Produkts

- über die Formel für das Cauchy-Produkt in (b) *und*
- über das Produkt der zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Reihen.

Lösung.

(a) Wegen $0 < \frac{1}{5} < 1$ und $0 < \frac{1}{13} < 1$ sind beide Reihen geometrische Reihen zum jeweiligen Wert und damit absolut konvergent. Also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{13}} = \frac{13}{12}.$$

(b) Das Cauchy-Produkt der beiden Reihen ist gegeben durch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$, wobei

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Mit den Definitionen der Reihen ergibt das für die Summanden des Cauchy-Produktes

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} 5^{-k}\, 13^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} 5^{-k}\, 13^{k-n} \\ &= 13^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{13}{5}\right)^k = 13^{-n} \left(\frac{\left(\frac{13}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{13}{5} - 1}\right) \\ &= \frac{5}{8} \cdot 13^{-n} \left(\left(\frac{13}{5}\right)^{n+1} - 1\right) \\ &= \frac{5}{8} \left(\frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5^n} - \frac{1}{13^n}\right). \end{aligned}$$

Nach der Dreiecksungleichung folgt damit, dass

$$|s_n| \leq \frac{5}{8} \left(\frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5^n} + \frac{1}{13^n}\right) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Somit konvergiert die Reihe über die Summanden der rechten Seite absolut als Summe entsprechend skalierter geometrischer Reihen. Daher konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

(c) Wir bestimmen nun den Wert der Reihe.

Mit der Formel des Cauchy-Produkts. Direkte Rechnung mit den oben bestimmten Summanden z_n und Rechenregeln für Reihen zeigt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} s_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{8}\left(\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{5^n} - \frac{1}{13^n}\right) = \frac{5}{8}\left(\frac{13}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{13^n}\right)\\ &= \frac{5}{8}\left(\frac{13}{5}\cdot\frac{5}{4} - \frac{13}{12}\right) = \frac{5\cdot 13}{4\cdot 8} - \frac{5\cdot 13}{8\cdot 12}\\ &= \frac{10\cdot 13}{8\cdot 12} = \frac{65}{48}.\end{aligned}$$

Berechnung über die ursprünglichen Reihen. Wir berechnen den Wert des Cauchy-Produktes als Produkt der Werte der ursprünglichen Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12} = \frac{65}{48}.$$

■

Aufgabe 3: Berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{(n^2)}}\cdot x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!\cdot x^n$

Lösung.

(a) Mit $a_n = \frac{n!}{n^n}$ gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad\Longrightarrow\qquad r = e.\end{aligned}$$

(b) Mit $b_n = \frac{n!}{2^{(n^2)}}$ gilt $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^{(n^2)}}\cdot\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{(n^2+2n+1)}}{2^{(n^2)}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1} = \infty \qquad\Longrightarrow\qquad r = \infty.\end{aligned}$$

(c) Mit $c_n = (n-1)!$ gilt $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad r = 0.$$

■